

Module1 : 多角形の外角の和は何度？ (1~2授業)

1. 本 Module のねらい・目標

この授業は、多角形の外角の和という問題に対して、解決の見通しをもち、多角形の角度についての性質から論理的に考察し、数学的に表現する力を身に付けるというねらいがあります。多角形の外角とその和の意味を理解し、どんな多角形も外角の和が360度となること、ある点の周りを「一周する」ということに他ならない、ということイメージ的に理解した上で、外角の和を既習事項に基づいて説明できることを目標とします。p5Iによるツールを用いることで、視覚的に多角形の和が360度となることが分かり、100角形などの実際に描くことが難しい多角形についても確認することができます。凹凸がある多角形の場合は180度をこえる内角の外角は「マイナス(負)」の角度としてとらえるのが適切であることもわかります。そのほかにも、子どもが「こんな多角形ならどうだろう」と不思議に思ったものに対しても結果が変わらないことをその場で視覚的・体験的に確認でき、さまざまな多角形やその不思議に興味をもち、学習に取り組めることになると期待します。

2. 観点別の目標と評価基準 (生徒視点 : どこを見てあげればよいか)

	目標	評価基準
知識及び技能	(正)多角形の内角や外角の意味がわかる。	多角形の内角や外角の意味がわかる。既習事項を用いて正多角形の内角・外角の値を求めることができる。
思考力、判断力、表現力等	ツールを使うことで直感的に、一般的に多角形の外角の和が360度ということを理解できる。既習事項を用いて、そのことを説明できる。	ツールを使うことで直感的に、一般的に多角形の外角の和が360度ということを理解できる。同時に既習事項や文字を用いて、上記定理を論理的に説明できる。
学びに向かう力、人間性等	多角形の外角の和を色々な多角形で確認しようとしている。多角形の内角や外角の中に潜む不思議に気づき、その背後の理由を多角的にとらえようとする。	予想をたて、すべての多角形で外角の和が360度となることを確認したり、その理由を直感的に、ないし論理的に理解しようとしている。さまざまな不思議を発見したり理由を考えたりしている。

Module 1 : 多角形の外角の旅

<https://editor.p5js.org/VirtualMathMuseum/full/uq0XbWbqy>



3. 準備物

- ・PC 又は タブレット端末(児童・生徒用) ・インターネット環境
- ・ワークシート、使い方ガイド ・ノート、筆記用具
- ・動画1「多角形の外角の和は何度？」
- ・先生用PC

4. 学習の展開 (50分クラス) *詳細は8. 授業の進行例 参照のこと

分	学習内容	学習活動	利用するもの
10	導入と問題の提示	・まずは実際にさまざまな多角形の外角を分度器で測り、その和を(事前に予想した上で)計算する。	・ワーク1-1 ・分度器
20	内角・外角の基本を確認 ツールで遊ぶ	・内角や外角の意味を確認した上で、内角の和や外角の和の公式を説明・確認する。 ・凹んだ内角の外角について考える。 ・ツールの使い方を確認する。 ・実際にツール「多角形の外角の旅」を用いて、公式が成り立つことをさまざまな多角形について確認する。	・ワーク1-2～1-4 ・ツール「多角形の外角の旅」、使い方ガイド
10	進行方向を変える角度の総和が一番小さくなる道順を考える	・ワーク1-3を行い、結局外角の和とは角度の変化の総和であることを理解する。 ・「一周する」の意味を考える。	・ワーク1-5
10	まとめ、振り返り 外角の和を直感的にとらえる	・学んだことを言葉で確認する。 ・場合によってはワーク1-4を行い、算数・数学においては時に直感的な理解が本質であることを体感する。	・ワーク1-6

大事な問い:

- ・凹んだ多角形では、凹んでいる部分の外角はどのように考えるのが自然だろう。
- ・どんな多角形で試してみたの？他にもある？
- ・なぜ外角の和は 360° なんだろう。 360° って何だろう。
- ・スタートからゴールまで同じ道を通らず一周したとき、進行方向を変えた角度の総和が一番小さい道順はどれだろう。
- ・星形は多角形ではないのかな？多角形って何だろう。

指導上の工夫:

- ・迷路の道順を考える時は、同じ道を通ってはいけないことを伝える。
- ・凹んだ図形にて、マイナスの値の外角を考えるということの意味を説明する。
- ・論理的な説明や証明は大切ではあるが、時に直感的なとらえ方の方が本質を表していることがある。

探究のヒント:

- ・なぜ凹んだ多角形の凹み部分の外角はマイナスなのだろう。
- ・本当に他に変な例外的な多角形はないだろうか。
- ・外角の和が360度ではない図形(多角形もどき)はあるだろうか。例えば720°、1080°、180°などはどうだろうか。
- ・結局「外角の和」とは何なのだろうか。
- ・身近なものの形についても、立体の場合も、外角と同じような(矢印の向きが?度変わったというような)角度を探し、その総和を調べてみよう。
- ・球面の上での多角形に対して、内角・外角の総和はどのようなになるだろう。

5. 関連する教科・単元など

- ・数学(基本的な平面図形の性質、円周角と中心角の関係)
- ・算数(円と球)
- ・技術
- ・図画工作
- ・美術 デジタルアート デザイン

6. その他(コンテンツの特徴や導入のポイントなど)

【p5ツール】

設定できる角の数は256個(256=1バイト)までである。

外角・内角の色は256段階で一周する色相の値で変化をつけている。

色モード1では隣り合う角度の色を256×0.618(黄金比)段階ずつずらして表示。

色モード2では256を均等に割ったグラデーションで表示。

【授業に関して】

- ・今回は迷路を使ったものだが、床にテープを貼ってその上を歩いてみたり、イス取りゲームで考えてみたり、実際に身体を動かして考える活動も面白いだろう。
- ・うまく探究的な学び、活動につなげていくと良い。

(回答例)

内角:多角形の内部で、隣り合う二辺が作り出す角度。

外角:多角形の辺に反時計まわりに向きをつける。ある一辺の矢印を延長したとき矢印がどのくらいの角度だけ反時計回りに回転して次の辺の矢印になるか、その角度のこと。

凹んだ多角形や自由な多角形(ただし自分自身と途中で交わらない)に対しても、同じように三角形 $N - 2$ 個(N は多角形の頂点の個数)に分割できるので、内角の和は全て

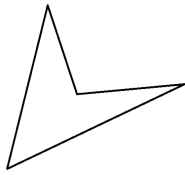
$$(N - 2) \times 180^\circ$$

となっていることがわかります。

*ただし、オマケ1-6にあるように、自己交差する場合は異なることがあります。

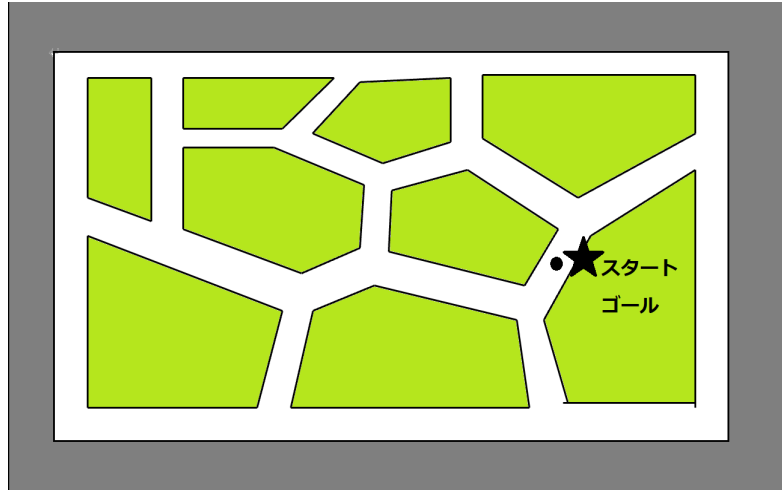
*自由に色々な多様な絵を描いて考えてもらうことが大切です。

また、内角+外角=180°を利用すると、上記の結果から外角の和が360°であることがわかります。



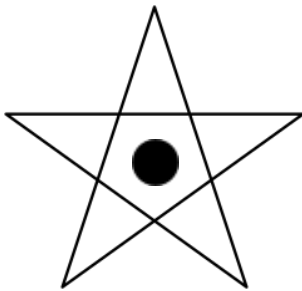
左の図においては、(上記の外角の定義に照らし合わせても)凹んでいるところの外角は、マイナスで考えるのが自然。すると、ここでも $\text{内角} + \text{外角} = 180^\circ$ が成り立つ。

* 凹んでいる箇所の内角は 180° を超えることに注意



どのように同じ道を通らず回ったとしても、必ず角度の変化(通ってきた多角形の外角の和)は 360° 以上になる。

つまり、最短角度の経路はたくさんあり、ぐるっとスタートからゴールまで一周するような経路は、すべて角度の変化の総和が 360° である最短角度の経路である。

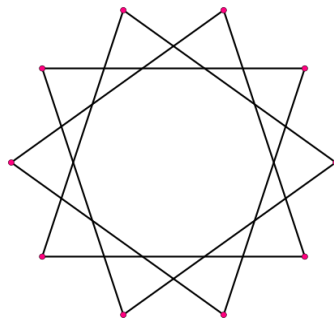


誰かが星印の上を反時計周りに動いて元に戻ってきたとき、真ん中にある●さんから見ると、●さんのまわりを実は実質2回ぐるっとまわっていることがわかるでしょうか？

つまり、こうした場合、外角の和(どの程度辺の矢印が変化したかの総和)は2周分 = 720° になるはずですよ。

分度器を使うか、計算により、このことを調べてみましょう！

下の図形(十芒星)の場合は、外角の和は、 $360^\circ \times 3 = 1080^\circ$ となります！



7. PCの環境設定

PCないしタブレット(児童・生徒おのこの、あるいは先生)

一人一台	<ul style="list-style-type: none"> ・ネット環境につながっているか ・ツールが動くか(動画ファイルが再生できるか)確認する
------	--

8. 授業の進行例

1) ワーク1-1(10分)

資料配布	・ワークシートを配布する
ワーク1-1	<ul style="list-style-type: none"> ・三角形と四角形の外角の和を予想する際に、間違えてもいいことを伝え自由に予想できるようにする。 ・実際にさまざまな多角形の外角を分度器で測り、その和を計算し、予想と比較する。

2) ワーク1-2～1-4(20分)

説明	・p5の使い方を使い方ガイド、先生用PCを共有しながら説明する。
ワーク1-2 (10分)	<ul style="list-style-type: none"> ・多角形の内角の和について紙板書を用いて復習する。 ・外角の表す部分を確認する。 ・どんな多角形でも外角の和が360度となることをイメージできるよう、他の多角形でも外角の和はどうなるか自由に試行する。 ・どんな試行をしたか共有し、自分だけでは確認できなかった多角形についても確認する。 (・どんな多角形でも外角の和が360度となることを説明するには文字を用いればよいことを確認する。 ・n角形の外角の和について、式をたてて説明する。)
ワーク1-3 (5分)	・凹んでいる部分の外角の考え方を簡単に説明する(ここは行わずワーク1-4を先に行っても良い)。
ワーク1-4 (5分)	・ツールの使い方を紹介し、遊びながら表を埋めていく。

3) ワーク1-5 (5分)

ワーク1-5	<ul style="list-style-type: none"> ・進行方向を変える角度の総和が一番小さくなる道順を考える。 ・ワーク1-5を行い、答えは一つではないことを確認する。
--------	---

3) 振り返り (5分)

振り返り (ワーク1-6)	<ul style="list-style-type: none"> ・多角形の外角の和が360度となること、$180^\circ \times n - (n\text{角形の内角の和})$で$n$角形の外角の和は説明できることを再確認する。 ・同時に、必要に応じてワーク1-6を行い、結局は多角形は内部の点の周りを一周するから外角の和は360°になるのだということを確認する。 ・今回の学習で分かったことや考えたことなどを振り返りシートに記入する。
------------------	--